

# ESTABILIDAD DE LAS ALAS DE ALFVEN EN HMHD

## STABILITY OF ALFVEN WINGS IN HMHD

P. A. Sallago <sup>\*1</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas-Universidad Nacional de La Plata,  
Paseo del Bosque s/n (1900), La Plata, Argentina.

Recibido: 31/12/2019; Aceptado: 07/10/2020


Un cuerpo conductor que se mueve uniformemente en un plasma magnetizado genera todo tipo de perturbaciones, entre ellas, ondas de Alfvén. Estas ondas pueden construir estructuras en el plasma que reciben el nombre de alas de Alfvén. Las mismas han sido detectadas y medidas en varios objetos del sistema solar. Bajo ciertas condiciones los términos de Hall y de presión electrónica deben ser considerados en la ley de Ohm, dando lugar a la Magnetohidrodinámica con Hall (HMHD). Aunque Sallago y Platzek han mostrado la existencia de alas de Alfvén en HMHD, aún queda por estudiar la estabilidad de las alas de Alfvén en estas condiciones. El objetivo de este trabajo es estudiar la estabilidad de las alas de Alfvén en presencia de una perturbación incompresible con la misma simetría que la estructura y con la misma polarización, en HMHD. Palumbo ha desarrollado un método analítico para el estudio de la estabilidad de estructuras estáticas, con una simetría, en plasmas magnetizados, en presencia de perturbaciones incompresibles que tengan la misma simetría que la estructura a estudiar. Como las alas de Alfvén son estructuras estacionarias, Sallago y Platzek mostraron la estabilidad de las alas de Alfvén en condiciones MHD extendiendo el método de Palumbo. En el presente trabajo se extiende este método para el estudio de la estabilidad de las alas de Alfvén en condiciones HMHD y se concluye que, en presencia de este tipo de perturbaciones, son estables.

*Palabras clave: alas de Alfvén, Hall, estabilidad.*

A conducting source moving uniformly through a magnetized plasma generates, among a variety of perturbations, Alfvén waves. Alfvén waves can build up structures in the plasma called Alfvén wings. The wings have been detected and measured in many solar system bodies, and their existence have been theoretically proved also. Under certain conditions, Hall and electronic pressure must be taken into account in the Ohm's law and so one gets Hall Magnetohydrodynamics (HMHD). In spite of Sallago and Platzek have shown the existence of Alfvén wings in HMHD, their stability under such conditions remains to be studied. The aim of this paper is to analyze the stability of an Alfvén wing, in the presence of an incompressible perturbation that has the same symmetry than the structure and polarization, in HMHD. Palumbo has developed an analytical method for the study of the stability of static structures with a symmetry in magnetized plasmas, in the presence of incompressible perturbations with the same symmetry than the structure. Since Alfvén wings are stationary structures, Sallago and Platzek have shown the stability of such Alfvén wings in MHD conditions by extending Palumbo's method. In the present paper this method is extended for Alfvén wings in HMHD conditions, and one concludes that in the presence of this kind of perturbations they are stable.

*Keywords: Alfvén wings, Hall, stability.*

<https://doi.org/10.31527/analesafa.2021.32.1.1>

 ISSN 1850-1168 (online)

### I. INTRODUCCIÓN

La interacción entre cuerpos conductores y plasmas magnetizados en movimiento relativo tiene lugar en una variedad de escenarios en los plasmas espaciales, situaciones en las que se generan alas de Alfvén, como en sistemas constituidos por satélites artificiales moviéndose en la ionosfera [1, 2], las lunas jovianas [3] y asteroides como Ida y Gaspra [4].

La influencia de los términos de Hall y de gradiente de presión electrónica en la ley de Ohm, tanto en la propagación de ondas de Alfvén como en la formación de las alas ha sido estudiado por Sallago y Platzek en 2004 [5], en adelante SP04, donde mostraron que en HMHD pueden propagarse ondas de Alfvén de gran amplitud si la densidad de corriente satisface una "condición de polarización" y pueden construirse alas para plasmas de fondo uniformes. En

este caso, una cantidad llamada presión generalizada  $P^*$  se mantiene constante dentro del ala y, para que se satisfagan las condiciones de contorno en el borde del ala, aparece una densidad de corriente en su superficie.

Por otra parte, el estudio de la estabilidad de ondas de Alfvén de gran amplitud ha sido abordado tanto desde el punto de vista teórico como experimental, tanto para plasmas MHD como para plasmas dispersivos [6, 7], permaneciendo bajo estudio durante mucho tiempo. Sallago y Platzek [8], en adelante SP07, mostraron la estabilidad de las alas de Alfvén en MHD para plasmas uniformes, frente a perturbaciones incompresibles que tengan la misma simetría que el ala, como una extensión del método desarrollado por Palumbo (1998) [9] para estructuras estáticas.

Debe tenerse presente que el ala es una región cilíndrica, la forma de la sección transversal depende de la forma de la fuente. El borde de la sección transversal del ala nunca es la proyección de una línea de campo de inducción magnética

\* pato@fcaglp.unlp.edu.ar

y no es posible tener una proyección cerrada de una línea de campo magnético en la sección transversal del ala. Estas son las mismas condiciones que se consideran en SP07 [8].

En la Sec. II se presenta una breve descripción del método extendido para el estudio de la estabilidad de las alas de Alfvén en MHD contenido en SP07 [8]. El mismo es extendido para alas de Alfvén en HMHD en la Sec. III. De la misma manera que sucedía en el caso de alas en MHD, el espacio puede dividirse en dos regiones relativas al ala, en la Sec. IV se analizan las soluciones en las regiones exterior e interior al ala en HMHD. La solución en la región exterior es trivial y, utilizando las mismas herramientas que en el caso MHD, se utiliza el método de las características para resolver las ecuaciones en la región interior. Finalmente, se muestra la estabilidad lineal de las alas de Alfvén en HMHD en presencia de perturbaciones incompresibles simétricas.

## II. MÉTODO

Para estudiar este problema de la estabilidad de las alas de Alfvén en HMHD, primero se describe brevemente el método aplicado para el estudio de la estabilidad de las mismas en MHD.

En un sistema de coordenadas cartesiano  $(x, y, z)$ , cuando las cantidades son independientes de una variable ( $z$ ), se pueden definir funciones corriente para todas las magnitudes de divergencia nula: el flujo de masa  $\rho \vec{V}$ , el campo de inducción magnética  $\vec{B}$ , la vorticidad  $\vec{\omega}$  y la densidad de corriente  $\vec{J}$ . De este modo los campos pueden escribirse:

$$\rho \vec{V} = \vec{\nabla} \chi \times \hat{z} + \rho V_z \hat{z} \quad (1)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \psi \times \hat{z} + B_z \hat{z} \quad (2)$$

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} V_z \times \hat{z} + \omega_z \hat{z} \quad (3)$$

$$\vec{J} = \frac{\vec{\nabla} B_z}{\mu} \times \hat{z} + J_z \hat{z} \quad (4)$$

donde  $\chi$ ,  $\psi$ ,  $V_z$  y  $B_z/\mu$  son funciones corriente.

Partiendo de las ecuaciones de la MHD, usando las funciones corriente, se obtiene un sistema de ecuaciones entre jacobianos de las distintas magnitudes físicas [10-12]. El método comienza considerando un estado de equilibrio inicial para la estructura bajo estudio y una perturbación incompresible de pequeña amplitud con la misma simetría que la estructura. Se elige una perturbación incompresible porque ésta tiene disponible toda su energía para inestabilizar a la estructura [13]. Se linealiza el sistema de ecuaciones y las cantidades físicas se identifican con los super-índices "0" y "1" relativo al estado de equilibrio y a la pequeña perturbación respectivamente. Solamente se toman en consideración casos en que la densidad del plasma es uniforme, por lo tanto, de la ecuación de continuidad se tiene que la perturbación en densidad es nula. Para el problema del estudio de la estabilidad de las alas de Alfvén en MHD el sistema

de ecuaciones resulta:

$$\rho^0 \frac{\partial V_z^1}{\partial t} - [\chi^0, V_z^1] - [\chi^1, V_z^0] - \frac{1}{\mu} [B_z^0, \psi^1] - \frac{1}{\mu} [B_z^1, \psi^0] = 0, \quad (5)$$

$$\rho^0 \frac{\partial w_z^1}{\partial t} - [\chi^0, w_z^1] - [\chi^1, w_z^0] = [J_z^0, \psi^1] + [J_z^1, \psi^0], \quad (6)$$

$$\rho^0 \frac{\partial \psi^1}{\partial t} - [\chi^0, \psi^1] - [\chi^1, \psi^0] = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial B_z^1}{\partial t} + [\psi^0, V_z^1] + [\psi^1, V_z^0] + \left[ B_z^0, \frac{\chi^1}{\rho^0} \right] + \left[ B_z^1, \frac{\chi^0}{\rho^0} \right] = 0. \quad (8)$$

Como el espacio puede dividirse en dos regiones relativas al ala, se analizan las soluciones en las regiones exterior e interior al ala. Tomando como dirección invariante al eje del ala, identificando a los valores en el interior del ala con super-índice "0" se tendrá [14]:

$$\rho^0 = \rho_0 = \text{constante}, \quad (9)$$

$$\chi^0 = -\psi^0 \sqrt{\frac{\rho_0}{\mu}}, \quad (10)$$

$$V_z^0 + \frac{B_z^0}{\sqrt{\mu \rho_0}} = V_{AZ}' = \text{constante}, \quad (11)$$

$$w_z^0 = -\sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}} J_z^0. \quad (12)$$

Notar que los campos de fondo son uniformes y las alas de Alfvén están formadas por ondas de Alfvén de corte que son perturbaciones incompresibles (ver Ec. (9)).

En el caso MHD se definen dos funciones auxiliares  $\zeta$  y  $\eta$ ,

$$\zeta = V_z^1 + \frac{B_z^1}{\sqrt{\mu \rho_0}}, \quad (13)$$

$$\eta = \chi^1 + \frac{\psi^1}{\sqrt{\mu \rho_0}}. \quad (14)$$

de modo que el sistema de ecuaciones (5-8), luego de un poco de álgebra resultan:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{2}{\sqrt{\mu \rho_0}} [\psi^0, \zeta] = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 \eta}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\mu \rho_0}} \left\{ [\psi^0, \nabla^2 \eta] - [\nabla^2 \psi^0, \eta] + \nabla^2 [\psi^0, \eta] \right\} = 0. \quad (16)$$

En la región exterior al ala se tiene  $\rho_0$ ,  $p_0$ ,  $\vec{V}_0 = (V_{0X}, 0, V_{0Z})$ , y  $\vec{B}_0 = (B_{0X}, 0, B_{0Z})$ , todas cantidades uniformes y las funciones corriente correspondientes a la región exterior son  $\psi_0 = yB_{0X}$  y  $\chi_0 = y\rho_0 V_{0X}$ . En la región interior las magnitudes están dadas por las Ecs. (9)-(12). El sistema de ecuaciones debe satisfacerse en todas partes. Supongamos que la dependencia temporal de la perturbación incompresible es del tipo  $\exp(-i\omega t)$ .

En la región exterior, debido a los valores de los campos no perturbados, las Ecs. (15) y (16) toman la forma de una ecuación diferencial de primer orden con solución del tipo:

$$v = v^*(y) \exp[-i\omega(t + x/KB_{0X})].$$

donde  $K$  es una constante. Como para distancias lejanas al ala la perturbación debe estar acotada, las únicas perturbaciones con frecuencias imaginarias ( $\omega = i\sigma^*$ ) son las de amplitud nula. Por lo tanto  $\zeta$  y  $\nabla^2 \eta$  son nulas y en consecuencia lo es  $B_Z^1$ . Teniendo en cuenta que  $\zeta$ ,  $B_Z^1$  y  $V_Z^1$  son continuos en el borde del ala  $\Gamma$ , ya que los elementos del plasma pasan a través de dicho borde, puede mostrarse usando la primer identidad de Green que  $\eta$ ,  $V_Z^1$ ,  $\chi^1$  y  $\psi^1$  son nulas en la región exterior.

En la región interior se utilizó el método de las características para mostrar que las perturbaciones también son nulas. En este caso se tomó una perturbación lineal de frecuencia imaginaria de la forma  $\varepsilon = \varepsilon^*(x, y) \exp(-i\omega t)$ .

Teniendo en cuenta que  $\zeta$  es continua en el borde del ala, puede escribirse una ecuación diferencial para  $\zeta^*$  en la región interior que puede resolverse por el método de las características:

$$\sigma^* \zeta^* + K \frac{\partial \psi^0}{\partial x} \frac{\partial \zeta^*}{\partial y} - K \frac{\partial \psi^0}{\partial y} \frac{\partial \zeta^*}{\partial x} = 0. \quad (17)$$

donde la ecuación de las líneas características es

$$\frac{dx}{KB_X^0} = \frac{dy}{KB_Y^0} = \frac{d\zeta^*}{\sigma \zeta^*}. \quad (18)$$

por lo que las líneas características son la proyección de las líneas del campo de inducción magnética sobre la sección transversal del ala. Integrando la Ec. (18) pueden obtenerse los valores de  $\zeta^*$  sobre cada curva característica en función de sus valores en el borde del ala y en consecuencia, resulta que  $\zeta$  es nulo también en la región interior. Para mostrar que lo mismo sucede con  $\eta$  se recurrió a un método utilizado por Sommerfeld (1949) [15] para la resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Este muestra que a partir de los valores de la variable dependiente y su derivada normal en una curva dada  $\Gamma$  (que no sea una curva característica) es posible obtener todas sus derivadas parciales sobre la misma y, por lo tanto, construir la solución en la región circundante a la curva expandiendo la variable dependiente en serie de Taylor. Como las curvas caracterís-

ticas son proyecciones de las líneas de campo de inducción magnética sobre la sección transversal del ala y como no es posible tener proyecciones cerradas de líneas de campo de inducción magnética en la región interior, uno puede adentrarse en el ala siguiendo el mismo procedimiento. De esta manera se mostró en SP07 que la única solución posible para una perturbación lineal que tiene frecuencia imaginaria es la de amplitud nula y en consecuencia el ala de Alfvén en MHD resulta estable frente a perturbaciones incompresibles simétricas.

### III. CASO HMHD

Para algunos plasmas totalmente ionizados es más representativa la ley de Ohm generalizada (ver Ref. [13]):

$$\frac{\vec{J}}{\sigma} = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} - \frac{1}{en^+} \vec{J} \times \vec{B} + \frac{1}{en^+} \vec{\nabla} p_e, \quad (19)$$

donde  $(\vec{J} \times \vec{B})/en^+$  es el término de Hall y  $p_e$  la presión electrónica. El término de Hall es de importancia cuando la densidad es baja y el campo de inducción magnética es intenso y expresa la condición de que los electrones pueden moverse en espiral libremente antes de colisionar. Al considerar los términos de Hall y de gradiente de presión electrónica de la ley de Ohm solamente se modifica la ecuación de inducción del conjunto de ecuaciones que gobierna al plasma.

Supongamos que en estas condiciones se mueve en el plasma un cuerpo conductor que, entre otras perturbaciones, genera ondas de Alfvén en HMHD que construyen alas de Alfvén en forma similar al caso MHD. En el caso con término de Hall también puede tomarse como coordenada ignorable a la dirección de la velocidad de grupo que en este caso es

$$\vec{V}'_{AH} = \vec{V}_0 - a\vec{B}_0. \quad (20)$$

donde el valor de  $a$  resulta de resolver la siguiente ecuación

$$a^2 + \frac{m^+ a b}{e \mu \rho_0} = \sqrt{\frac{1}{\mu \rho_0}}, \quad (21)$$

donde  $m^+$  es la masa del protón y  $b$  es una cantidad inversamente proporcional al tamaño de la fuente (a menor tamaño de la fuente mayor es la importancia relativa del término de Hall). El valor de  $b$  también es el factor de proporcionalidad entre la densidad de corriente debida a las perturbaciones de Alfvén y su rotor.

Siguiendo los pasos anteriores, se puede reescribir el sistema de ecuaciones de la HMHD utilizando funciones corriente para que los campos presenten divergencia nula (ver SP04). De esta manera se obtuvo los siguientes valores para el interior del ala de Alfvén con término de Hall:

$$\chi^0 - \frac{m^+}{e\mu} B_Z^0 = a\rho_0 \psi^0, \quad (22)$$

$$\psi^0 + \frac{m^+}{e} V_Z^0 = \frac{\chi^0}{a\rho_0}, \quad (23)$$

$$-V_Z^0 + aB_Z^0 + \frac{m^+}{e\rho_0} J_Z^0 = -V_{ZA}^0, \quad (24)$$

$$-\frac{V_Z^0}{a\rho_0} + \frac{B_Z^0}{\rho_0} + \frac{m^+}{e\rho_0} w_Z^0 = -\frac{V_{ZA}^0}{a\rho_0}, \quad (25)$$

$$\vec{w}^0 = \frac{\vec{J}^0}{a\rho_0}. \quad (26)$$

La siguiente expresión es cierta solamente para las ondas de Alfvén, pero si la cantidad se escribe dentro del jacobiano, se puede hacer un abuso de notación y decir que

$$\vec{J}^0 = \frac{b}{\mu} \vec{B}^0. \quad (27)$$

Con la intención de evaluar la estabilidad de las alas de Alfvén en HMHD se la testea mediante una perturbación incompresible con la misma simetría y polarización que las ondas de Alfvén que componen a la estructura. Como las ondas de Alfvén en HMHD son perturbaciones incompresibles, y la perturbación es incompresible, de la ecuación de continuidad se tiene nuevamente que no hay perturbación en densidad. El sistema de ecuaciones de la HMHD escrito con las funciones corriente toma el siguiente aspecto

$$\rho^0 \frac{\partial V_Z^1}{\partial t} - [\chi^0, V_Z^1] - [\chi^1, V_Z^0] - \frac{1}{\mu} [B_Z^0, \psi^1] - \frac{1}{\mu} [B_Z^1, \psi^0] = 0, \quad (28)$$

$$\rho^0 \frac{\partial w_Z^1}{\partial t} - [\chi^0, w_Z^1] - [\chi^1, w_Z^0] = [J_Z^0, \psi^1] + [J_Z^1, \psi^0], \quad (29)$$

$$\rho^0 \frac{\partial \psi^1}{\partial t} - [\chi^0, \psi^1] - [\chi^1, \psi^0] + \frac{m^+}{e\mu\rho^0} [B_Z^1, \psi^0] + \frac{m^+}{e\mu\rho^0} [B_Z^0, \psi^1] = 0, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial B_Z^1}{\partial t} + [\psi^0, V_Z^1] + [\psi^1, V_Z^0] + \left[ B_Z^0, \frac{\chi^1}{\rho^0} \right] \\ & + \left[ B_Z^1, \frac{\chi^0}{\rho^0} \right] + \frac{m^+}{e\rho^0} [J_Z^1, \psi^0] + \frac{m^+}{e\rho^0} [J_Z^0, \psi^1] \\ & = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

A continuación se definen las funciones auxiliares  $p$ ,  $q$  y  $\Delta$ , tal que

$$p = a\psi^1 - \frac{\chi^1}{\rho_0} + \frac{m^+}{e\mu\rho_0} B_Z^1, \quad (32)$$

$$q = V_Z^1 - aB_Z^1 - \frac{m^+}{e\rho_0} J_Z^1, \quad (33)$$

$$\Delta = -a\rho_0 w_Z^1 + \frac{b}{\mu} B_Z^1. \quad (34)$$

Luego de reemplazar (22)-(27) y (32)-(34) en las Ecs. (28)-(31) se tiene

$$\frac{\partial V_Z^1}{\partial t} = \frac{1}{\rho^0} [\chi^0, q] + [V_Z^0, p], \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \rho^0 \frac{\partial w_Z^1}{\partial t} &= \frac{b}{a\mu} [B_Z^0, p] + [\psi^0, \Delta] \\ &+ \left[ \frac{m^+}{e\mu\rho^0 a} B_Z^0, \Delta \right], \end{aligned} \quad (36)$$

$$\frac{\partial \psi^1}{\partial t} = [\psi^0, p], \quad (37)$$

$$\frac{\partial B_Z^1}{\partial t} = [B_Z^0, p] - [\psi^0, q]. \quad (38)$$

Luego de un poco de álgebra, considerando la misma polarización para la perturbación, pueden escribirse las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \left( a + \frac{1}{\mu\rho^0 a} \right) [\psi^0, q] - \frac{m^+}{e\mu\rho^0} [B_Z^0, q], \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial t} &= \frac{m^+}{e\mu\rho^0} [B_Z^0, \Delta] + \frac{a b m^+}{e\mu} [\psi^0, (a+b)q] \\ &+ \frac{a m^+}{e\mu\rho^0} [\psi^0, \Delta] - \frac{a m^+}{e\mu} \nabla^2 ([B_Z^0, p]) \\ &+ \frac{a m^+}{e\mu} \nabla^2 ([\psi^0, q]), \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 p}{\partial t} &= \frac{m^+}{e\mu\rho^0} \left[ B_Z^0, b^2 p + \frac{\Delta}{\rho^0 a} \right] + [\psi^0, a b q] \\ &+ \left[ \psi^0, \frac{\Delta}{\rho^0} \right] + \frac{m^+}{e\mu\rho^0} \nabla^2 ([B_Z^0, p] - [\psi^0, q]). \end{aligned} \quad (41)$$

#### IV. ANALISIS DE LA ESTABILIDAD DEL ALA

Se divide el espacio en las regiones interior y exterior al ala: en la región exterior las magnitudes de interés  $\rho_0$ ,  $p_0$ ,  $\vec{V}_0 = (V_{0X}, 0, V_{0Z})$  y  $\vec{B}_0 = (B_{0X}, 0, B_{0Z})$  son uniformes y en consecuencia las funciones corriente son  $\psi_0 = yB_{0X}$  y  $\chi_0 = y\rho_0 V_{0X}$ ; mientras que en la región interior los valores de las magnitudes corresponden a los dados por (22)-(27). Nuevamente, el sistema de ecuaciones debe satisfacerse en todas partes y la dependencia temporal para la perturbación incompresible se toma del tipo  $\exp(-i\omega t)$ .

##### Región exterior

En la región exterior las ecuaciones toman el siguiente aspecto:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = - \left( a + \frac{1}{\mu\rho_0 a} \right) B_{0X} \frac{\partial q}{\partial x}, \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial t} &= -\frac{a b}{e\mu} m^+ B_{0X} (a+b) \frac{\partial q}{\partial x} \\ &- \frac{am^+}{e\mu \rho_0} B_{0X} \frac{\partial \Delta}{\partial x} - \frac{am^+}{e\mu} B_{0X} \nabla^2 \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 p}{\partial t} &= -B_{0X} a b \frac{\partial q}{\partial x} - B_{0X} \frac{\partial \Delta}{\partial x} \\ &- \frac{m^+ B_{0X}}{e\mu \rho_0} \nabla^2 \left( \frac{\partial q}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (44)$$

La Ec. (42) es una ecuación diferencial parcial de primer orden, para la misma se propone la solución

$$q = q^*(y) \exp[i(kx - \omega t)]. \quad (45)$$

Como  $q$  debe tomar un valor acotado para  $x \rightarrow \infty$ , la frecuencia debe tomar valores reales. En el caso en que la frecuencia tome valores imaginarios,  $\omega = i\sigma$  por ejemplo, entonces  $q$  debe ser nulo en la región exterior. Teniendo en consideración este resultado puede verse fácilmente de (43) y (44) que lo mismo sucede con  $\Delta$ ,  $\nabla^2 p$  y con  $w_Z^1$  (ver (34)). Como  $q$  es nulo, de (35) resulta que  $V_Z^1$  es nulo y por lo tanto lo es  $B_Z^1$ . Para encontrar el valor de  $p$  en la región exterior debe tenerse en cuenta que  $V_Z^1$ ,  $B_Z^1$  y por lo tanto  $q$ , son continuos en el borde del ala ya que los elementos del plasma pasan a través de la misma. En consecuencia, en el borde del ala del lado interior se tiene de la Ec. (38) que  $[B_Z^0, p] = 0$ . Si  $\vec{\nabla} B_Z^0$  es distinto de cero en el borde del ala del lado interior, significa que la densidad de corriente sobre ella es no nula. Si esto sucede, significa que los gradientes de  $B_Z^0$  y de  $p$  son paralelos. Como el borde del ala es una superficie de  $B_Z^0$  constante, entonces  $p$  es constante sobre el borde del ala. Luego, usando la continuidad de  $p$  y la primer identidad de Green se tiene que  $p$  es constante en el borde del ala del lado exterior, esta constante puede valer cero. Por lo tanto  $p$  es nulo en el región exterior y en consecuencia lo son  $\psi^1$  y  $\chi^1$  (ver Ecs. (32) y (37)).

En la región exterior, donde el plasma es uniforme, ninguna perturbación puede causar la inestabilidad del plasma.

### Región interior

En esta subsección se muestra que, en la región interior, las amplitudes de las perturbaciones de las distintas magnitudes son nulas cuando se consideran perturbaciones lineales de la forma  $v = v^*(x, y) \exp(-i\omega t)$  con frecuencias imaginarias, ya que las mismas son nulas en el exterior del ala, de la misma manera que sucedía en el caso MHD (SP07) y en consecuencia, las alas de Alfvén en HMHD resultarán estables frente a perturbaciones incompresibles que tengan la misma simetría y polarización.

Primero se analiza el caso de  $q$  para frecuencias imaginarias, recordando que debe ser continuo en el borde del ala. La ecuación diferencial para  $q^*$  teniendo en cuenta (21) y (27) resulta (ver Ec. (39)):

$$\sigma q^* = -2a \left( B_Y^0 \frac{\partial q^*}{\partial y} + B_X^0 \frac{\partial q^*}{\partial x} \right), \quad (46)$$

Nótese que (46) es del tipo de la Ec. (17), siendo la única

diferencia el valor de la constante. Por lo tanto, la curva característica es la proyección de las líneas de campo sobre la sección transversal del ala. La ecuación de las características puede integrarse para encontrar el valor de  $q^*$  sobre cada una de ellas en función del valor en el borde del ala. Como en el borde del ala es nulo, resulta que  $q$  es nulo en el interior del ala.

Una vez reemplazado el resultado en las Ecs. (40) y (41), éstas pueden desacoplarse fácilmente obteniendo

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = \frac{2m^+}{e\mu \rho^0} [B_Z^0, \Delta] + a \left( 1 + \frac{m^+}{e\mu \rho^0} \right) [\psi^0, \Delta], \quad (47)$$

$$\frac{\partial \nabla^2 p}{\partial t} = \frac{m^+ b^2}{e\mu \rho^0} [B_Z^0, p]. \quad (48)$$

Al reemplazar la forma de la perturbación en la ecuación para  $\Delta$ , Ec. (47), toma forma similar a la Ec. (46) por lo que, con los mismos argumentos, resulta que  $\Delta^*$  y por lo tanto  $\Delta$  es nula en el interior del ala.

Para mostrar que  $p$  es nula en la región interior para perturbaciones lineales con frecuencia imaginaria, se utiliza el método basado en el de las características, utilizado por Sommerfeld [15] para la resolución de segundo orden que fue mencionado en la Sec. II. Se muestra que, a partir de los valores de la variable dependiente y de su derivada normal a una curva dada  $\Gamma$  (que no sea una característica), es posible obtener todos las derivadas parciales sobre ésta, y por lo tanto, construir la solución en el región vecina, expandiendo la variable dependiente en una serie de Taylor.

Como en la región exterior  $p^*$  y  $\psi^{*1}$  y todas sus derivadas primeras son cero (para frecuencias imaginarias) y son continuas en  $\Gamma$ , también son todas nulas en el lado interior de  $\Gamma$ . En consecuencia, las derivadas tangenciales a  $\Gamma$  de las derivadas primeras de  $p^*$  y  $\psi^{*1}$  son también nulas en el lado interior de  $\Gamma$ . Este resultado brinda relaciones entre las derivadas segundas de  $p^*$  y  $\psi^{*1}$  y, además pueden obtenerse en forma independiente otras relaciones por derivar la Ec. (30). Este proceso es similar al mostrado por en SP07 en el análisis de la estabilidad de las alas en MHD, por lo que finalmente se obtiene que del lado interior de  $\Gamma$ :

$$\left( B_Y^0 \frac{n_y}{n_x} + B_X^0 \right) \frac{\partial^2 p^*}{\partial x^2} = 0,$$

$$\left( B_Y^0 \frac{n_y}{n_x} + B_X^0 \right) \frac{\partial^2 p^*}{\partial y^2} = 0,$$

donde  $n_x$ ,  $n_y$  son las componentes del vector unitario normal a la curva  $\Gamma$ . Como  $\Gamma$  no es la proyección de una línea de campo de inducción magnética,  $(B_Y^0 n_y / n_x + B_X^0)$  es distinto de cero, por lo que todas las derivadas segundas de  $p^*$  también son nulas en  $\Gamma$ . Utilizando esta misma idea, calculando las derivadas tangenciales del  $\nabla^2 p^*$  y usando la ecuación diferencial (48) de nuevo puede obtenerse sucesivamente que las derivadas de orden  $n+1$  de  $p^*$  son nulas en  $\Gamma$  si lo son las de orden  $n$ . Finalmente, expandiendo  $p^*$  en serie de Taylor en las vecindades de  $\Gamma$ , resulta que  $p^*$  es nula. Como no es posible tener en la región interior al ala



proyecciones de las líneas de campo de inducción magnética cerradas, se puede repetir el procedimiento e ir hacia zonas alejadas del borde interior del ala.

Como  $p$  y  $q$  son cero de (35) resulta que  $V_Z^1$  es cero y de (33) se tiene que  $B_Z^1$  es cero (y en consecuencia  $J_Z^1$  por la condición de polarización). Como  $\Delta$  es cero, de (34) resulta que  $w_Z^1$  es cero. Como  $p$  es cero, de la Ec. (37) resulta que  $\psi^1$  es cero y de (32) lo es  $\chi^1$ .

De esta manera, usando el método empleado en SP07, se ha mostrado que para perturbaciones simétricas incompresibles las alas de Alfvén son estructuras estables en plasmas donde se tiene en consideración el término de Hall de la ley de Ohm, cuando las perturbaciones tienen la misma polarización que las ondas de Alfvén que construyen las alas.

## V. CONCLUSIONES

En este trabajo se muestra que, en los plasmas en los que se tiene en consideración el término de Hall de la ley de Ohm (HMHD), las alas de Alfvén en plasmas uniformes son estructuras estables en presencia de perturbaciones lineales incompresibles que tienen la misma simetría que el ala y polarización. En el estudio del problema se utilizó el método adaptado por Sallago y Platzeck en 2007 partiendo de otro desarrollado por Palumbo. Se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales; en la región exterior del ala, cuando la frecuencia es imaginaria, este sistema admite solo la solución de amplitud nula. Como la densidad de corriente no es nula en el límite del ala, también en la región interior la solución es nula, para esto se utilizó el mismo método basado en el método de las características que fue empleado para analizar la estabilidad de las alas de Alfvén en MHD.

## REFERENCIAS

- [1] S. D. Drell, H. M. Foley y M. A. Ruderman. Drag and Propulsion of Large Satellites in the Ionosphere: An Alfvén Propulsion Engine in Space. *J. Geophys. Res.* **70**, 3131-3145 (1965).
- [2] M. Dobrowolny y P. Veltri. Structure of Alfvén wings associated with a conductor moving through a magnetoplasma. *Astron. Astrophys.* **167**, 179-185 (1986).
- [3] J. C. Dorelli, A. Gloer, G. Collinson y G. Tóth. The role of the Hall effect in the global structure and dynamics of planetary magnetospheres: Ganymede as a case study. *J. Geophys. Res.* **120**, 5377-5392 (2015).
- [4] P. Sallago. Aplicaciones del estudio de las alas de Alfvén con funciones corriente. *Anales AFA* **17**, 132-143 (2005).
- [5] P. A. Sallago y A. M. Platzeck. Alfvén waves and wings in Hall magnetohydrodynamics. *J. Geophys. Res.* **109**, A04218 (2004).
- [6] B. Buti y B. E. Goldstein. Alfvén waves: Unresolved issues. *Adv. Space Res.* **32**, 291-301 (2003).
- [7] D. Simpson, M. S. Ruderman y R. Erdélyi. Absolute and convective instabilities of parallel propagating circularly polarized Alfvén waves: numerical results. *Astron. Astrophys.* **452**, 641-646 (2006).
- [8] P. A. Sallago y A. M. Platzeck. Stability of Alfvén wings in uniform plasmas. *J. Plasma Phys.* **73**, 957-966 (2007).
- [9] L. Palumbo. *Contribution to the development of an analytical methodology for the study of the stability of magnetized plasmas* Tesis lic. (Universidad de Firenze, Italia, 1998).
- [10] K. C. Tsinganos. Magnetohydrodynamic equilibrium. II - General integrals of the equations with one ignorable coordinate. *Astrophys. J.* **252**, 775-790 (1982).
- [11] Y. Z. Agim y J. A. Tataronis. General two-dimensional magnetohydrodynamic equilibria with mass flow. *J. Plasma Phys.* **34**, 337-360 (1985).
- [12] L. J. Palumbo y A. M. Platzeck. Magnetically confined plasma flows with helical symmetry. *J. Plasma Phys.* **60**, 449-467 (1998).
- [13] E. R. Priest. *Solar Magnetohydrodynamics* ISBN: 978-94-009-7958-1 (Springer, Netherlands, 1982).
- [14] P. A. Sallago y A. M. Platzeck. Alfvén waves and wings in nonuniform plasmas. *J. Geophys. Res.* **105**, 27393-27400 (2000).
- [15] A. Sommerfeld. *Partial Differential Equations in Physics* (Academic Press, New York, 1949).